

**Gabriel Popa, Adrian Zanoschi,
Gheorghe Iurea, Dorel Luchian**

MATEMATICĂ

EVALUAREA NAȚIONALĂ 2023

Clasa a VIII-a

- Memorator cu cele mai importante noțiuni și definiții din programă
- Teme recapitulative conținute de programa de examen
- 80 de variante de subiecte cu indicații de rezolvare

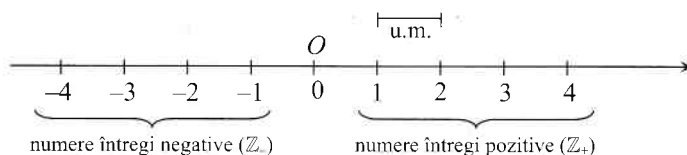
ALGEBRĂ

MULȚIMI NUMERICE

$\mathbb{N}$ – mulțimea numerelor naturale; $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{Z}$ – mulțimea numerelor întregi; $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$; $\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$.



$\mathbb{Q}$ – mulțimea numerelor raționale; $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ și } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$; $\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$.

$\mathbb{R}$ – mulțimea numerelor reale; $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = mulțimea numerelor iraționale.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

OPERAȚII CU MULȚIMI

Reuniunea: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.

Intersecția: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$.

Diferența: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$.

OPERAȚII CU NUMERE

Factor comun: $f \cdot a \pm f \cdot b = f \cdot (a \pm b)$, $\forall a, b, f \in \mathbb{R}$.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(1+n) \cdot n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ (citim: „n factorial”); } 0! = 1.$$

Opusul numărului real r este numărul real $-r$.

Inversul numărului real nenul r este numărul real $r^{-1} = \frac{1}{r}$.

TEOREMA ÎMPĂRȚIRII CU REST

În $\mathbb{N}$: $\forall a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0, \exists! c, r \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = b \cdot c + r, 0 \leq r < b$.

În $\mathbb{Z}$: $\forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \exists! c \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = b \cdot c + r, 0 \leq r < |b|$.

DIVIZIBILITATE ÎN $\mathbb{N}$

Pentru $d, m \in \mathbb{N}$ spunem că $d \mid m$ dacă există $x \in \mathbb{N}$ astfel încât $m = d \cdot x$.

Proprietăți:

$$P_1: 1 \mid n; n \mid 0, \forall n \in \mathbb{N};$$

$$P_2: \text{Dacă } a, d \in \mathbb{N} \text{ și } d \mid a, \text{ atunci } d \mid a \cdot n, \forall n \in \mathbb{N};$$

$$P_3: \text{Dacă } a, b, d \in \mathbb{N}, d \mid a \text{ și } d \mid b, \text{ atunci } d \mid (a \pm b).$$

Criterii de divizibilitate:

I. Folosind ultima cifră a numărului: $2 \mid n \Leftrightarrow u(n) \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$; $5 \mid n \Leftrightarrow u(n) \in \{0, 5\}$; $10 \mid n \Leftrightarrow u(n) = 0$.

II. Folosind suma cifrelor numărului: $3 \mid n \Leftrightarrow 3 \mid S(n)$; $9 \mid n \Leftrightarrow 9 \mid S(n)$.

III. Folosind ultimele două cifre ale numărului: $4 \mid \overline{a \dots xy} \Leftrightarrow 4 \mid \overline{xy}$; $25 \mid \overline{a \dots xy} \Leftrightarrow 25 \mid \overline{xy}$.

Număr prim: număr natural care are exact doi divizori.

C.m.m.d.c.: $d = (a, b)$ dacă: i) $d \mid a$ și $d \mid b$;
ii) dacă $d' \mid a$ și $d' \mid b$, atunci $d' \mid d$.

Pentru a calcula (a, b) procedăm astfel:

- descompunem numerele a și b în factori primi;
- luăm factorii primi comuni, o singură dată, la exponentul cel mai mic și îi înmulțim.

Numerele a și b sunt relativ prime (prime între ele) dacă $(a, b) = 1$.

Dacă $d = (a, b)$, atunci $a = dx$, $b = dy$, cu $x, y \in \mathbb{N}$, $(x, y) = 1$.

Dacă $n \mid a$ și $n \mid b$, atunci $n \mid (a, b)$.

Dacă $a \mid b \cdot c$ și $(a, b) = 1$, atunci $a \mid c$.

C.m.m.m.c.: $m = [a, b]$ dacă: i) $a \mid m$ și $b \mid m$;
ii) dacă $a \mid m'$ și $b \mid m'$, atunci $m \mid m'$.

Pentru a calcula $[a, b]$ procedăm astfel:

- descompunem numerele a și b în factori primi;
- luăm factorii primi comuni și necomuni, o singură dată, la exponentul cel mai mare și îi înmulțim.

Dacă $a \mid n$ și $b \mid n$, atunci $[a, b] \mid n$.

Oricare ar fi $a, b \in \mathbb{N}$, are loc egalitatea $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$.

PUTERI

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{\text{de } n \text{ ori}}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}.$$

$$a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R}^*; a^1 = a, \forall a \in \mathbb{R}; 1^n = 1, \forall n \in \mathbb{N}; 0^0 \text{ nu are sens.}$$

OPERAȚII CU PUTERI

$$1. a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \forall a \in \mathbb{R}^*, m, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2. a^m : a^n = a^{m-n}, \forall a \in \mathbb{R}^*, m, n \in \mathbb{Z}.$$

$$3. (a^m)^n = a^{mn}, \forall a \in \mathbb{R}^*, m, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4. (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \forall a, b \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{Z}.$$

$$5. (a : b)^n = a^n : b^n, a, b \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{Z}.$$

$$6. (-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \text{ este număr par;} \\ -1, & \text{dacă } n \text{ este număr impar.} \end{cases}$$

FRAȚII ORDINARE, FRAȚII ZECIMALE

Fracție ireductibilă: $\frac{a}{b}$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $(a, b) = 1$.

Fracții echivalente: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dacă $a \cdot d = b \cdot c$.

Dacă $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$, atunci $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow b \mid a$.

Transformarea fracțiilor zecimale în fracții ordinare:

Tipul fracției zecimale	Mod de transformare	Exemplu
zecimală finită	$\overline{a, b_1 b_2 \dots b_k} = a \frac{b_1 b_2 \dots b_k}{10^k}$	$2,79 = 2 \frac{79}{10^2} = \frac{279}{100}$
periodică simplă	$\overline{a, (b_1 b_2 \dots b_k)} = a \frac{b_1 b_2 \dots b_k}{\underbrace{99 \dots 9}_{k \text{ ori}}}$	$13,(24) = 13 \frac{24}{99}$
periodică mixtă	$\overline{a, b_1 b_2 \dots b_k (c_1 c_2 \dots c_p)} = a \frac{b_1 b_2 \dots c_p - b_1 b_2 \dots b_k}{\underbrace{99 \dots 9}_{p \text{ ori}} \underbrace{00 \dots 0}_{k \text{ ori}}}$	$3,61(754) = 3 \frac{61754 - 61}{99900}$

$$m_a = \frac{x_1 + x_2}{2}; m_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}, \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}.$$

Dacă $p_1, p_2, \dots, p_k$ sunt respectiv ponderile numerelor $x_1, x_2, \dots, x_k$, atunci:

$$m_p = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k}{p_1 + p_2 + \dots + p_k} \quad (\text{media aritmetică ponderată}).$$

MODULUL UNUI NUMĂR REAL

$|x|$ – modulul (sau valoarea absolută) a unui număr real; $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$

Proprietăți ale modulului:

$$P_1: |x| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}; |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$P_2: |x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R};$$

$$P_3: \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*;$$

$$P_4: |x + y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

PARTEA ÎNTREAGĂ A UNUI NUMĂR REAL: $[x]$

$$[x] \leq x < [x] + 1; [x] \in \mathbb{Z}.$$

PARTEA FRAȚIONARĂ A UNUI NUMĂR REAL: $\{x\}$

$$\{x\} = x - [x]; 0 \leq \{x\} < 1.$$

RĂDĂCINA PĂTRATĂ (RADICALUL)

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a, \text{ unde } a, x \in \mathbb{R}, a, x \geq 0.$$

REGULI DE CALCUL CU RADICALI

$$1. \text{ Dacă } a \geq 0, b \geq 0, \text{ atunci } \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}.$$

$$2. \text{ Dacă } a \geq 0, b > 0, \text{ atunci } \sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

$$3. \sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}, \quad a \geq 0, b \geq 0.$$

$$4. \sqrt{a^2} = |a|, a \in \mathbb{R}; \sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a, \text{ dacă } a \in \mathbb{R}_+; \sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}, \quad a \in \mathbb{R}, b \geq 0.$$

RAȚIONALIZAREA NUMITORULUI

$$1. \frac{\sqrt{b}c}{a\sqrt{b}} = \frac{c\sqrt{b}}{a \cdot b}, \quad b > 0, a \neq 0.$$

$$2. \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}, \quad \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}, \quad a > 0, b > 0, a \neq b.$$

$$3. \frac{n}{a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}} = \frac{n(a\sqrt{b} \mp c\sqrt{d})}{a^2 \cdot b - c^2 \cdot d}, \quad b > 0, d > 0, a \neq 0, c \neq 0 \text{ și } a^2 b \neq c^2 d.$$

FORMULA RADICALILOR COMPUȘI

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}, \text{ unde } c = \sqrt{a^2 - b}.$$

$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$; $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$; $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$; $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.
 $[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$; $(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$; $(-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$; $(-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$.
 $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq a\} = [-a; a]$. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq a\} = (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$.

FORMULE DE CALCUL PRESCURTAT

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. 2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. 3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

MEDIA GEOMETRICĂ (PROPORȚIONALĂ)

$m_g = \sqrt{a \cdot b}$, $a \geq 0, b \geq 0$; $a \leq m_g \leq m_a \leq b$, pentru $0 \leq a \leq b$ (inegalitatea mediilor).

PRODUSUL CARTEZIAN

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ și } y \in B\}$.

Dacă alegem în plan un sistem de coordonate xOy , putem identifica elementele produsului cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cu punctele planului. Oricărei perechi ordonate de numere reale (x_A, y_A) îi corespunde un unic punct $A(x_A, y_A)$; x_A se numește *abscisa* punctului A , iar y_A se numește *ordonata* punctului A .

Distanța dintre două puncte $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ se calculează după formula: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Coordonatele mijlocului segmentului AB sunt: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$; $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

FUNCȚII

Fie A și B două mulțimi nevide. Dacă printr-un procedeu oarecare facem ca *fiecărui* element din mulțimea A să-i corespundă *un singur* element din mulțimea B , atunci spunem că am definit o funcție de la A la B .

$f: A \rightarrow B$; A – domeniul de definiție; B – codomeniul.

Graficul unei funcții: $G_f = \{(x, y) \in A \times B \mid x \in A, y = f(x)\}$.

$M(x, y) \in G_f \Leftrightarrow f(x) = y$, cu $x \in A, y \in B$.

Funcțiile $f: A \rightarrow B$ și $g: C \rightarrow D$ sunt egale dacă $A = C, B = D$ și $f(x) = g(x), \forall x \in A$.

FUNCȚIA DE GRADUL I

Este o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Graficul unei asemenea funcții este o dreaptă oblică.

$G_f \cap O_y = \{A(0; b)\}$
 $G_f \cap O_x = \left\{B\left(-\frac{b}{a}; 0\right)\right\}$

} Punctele de intersecție a graficului cu axele de coordonate.

Dacă $a = 0$, atunci $f(x) = b$ (funcția este constantă); graficul este o dreaptă orizontală.

ECUAȚIA DE GRADUL AL II-LEA

Forma generală: $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}$. Discriminantul ecuației: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Dacă $\Delta > 0$, ecuația are două soluții reale distincte: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Dacă $\Delta = 0$, cele două soluții sunt egale: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Dacă $\Delta < 0$, ecuația nu are soluții reale.

Pentru $\Delta \geq 0$, expresia $ax^2 + bx + c$ se descompune în factori astfel: $a(x - x_1)(x - x_2)$.

UNITĂȚI DE MĂSURĂ

Unitatea de exprimare Tipul măsurătorii	Submultiplii	Unitatea principală	Multiplii
Lungime	mm $\xrightarrow{:10}$ cm $\xrightarrow{:10}$ dm $\xrightarrow{:10}$ m $\xrightarrow{:10}$ dam $\xrightarrow{:10}$ hm $\xrightarrow{:10}$ km $\xleftarrow{\times 10}$ $\xleftarrow{\times 10}$ $\xleftarrow{\times 10}$ $\xleftarrow{\times 10}$ $\xleftarrow{\times 10}$ $\xleftarrow{\times 10}$	m	dam, hm, km
Suprafață	mm ² $\xrightarrow{:10^2}$ cm ² $\xrightarrow{:10^2}$ dm ² $\xrightarrow{:10^2}$ m ² $\xrightarrow{:10^2}$ dam ² $\xrightarrow{:10^2}$ hm ² $\xrightarrow{:10^2}$ km ² $\xleftarrow{\times 10^2}$ $\xleftarrow{\times 10^2}$ $\xleftarrow{\times 10^2}$ $\xleftarrow{\times 10^2}$ $\xleftarrow{\times 10^2}$ $\xleftarrow{\times 10^2}$	m ²	dam ² , hm ² , km ²
Volum	mm ³ $\xrightarrow{:10^3}$ cm ³ $\xrightarrow{:10^3}$ dm ³ $\xrightarrow{:10^3}$ m ³ $\xrightarrow{:10^3}$ dam ³ $\xrightarrow{:10^3}$ hm ³ $\xrightarrow{:10^3}$ km ³ $\xleftarrow{\times 10^3}$ $\xleftarrow{\times 10^3}$ $\xleftarrow{\times 10^3}$ $\xleftarrow{\times 10^3}$ $\xleftarrow{\times 10^3}$ $\xleftarrow{\times 10^3}$	m ³	dam ³ , hm ³ , km ³

Pentru suprafețe:

$$1 \text{ ha} = 100 \text{ ari} = 10\,000 \text{ m}^2; \quad 1 \text{ ar} = 100 \text{ m}^2.$$

Pentru capacitate, unitatea principală este litrul (ℓ).

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \ell;$$

$$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml};$$

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \ell.$$

Unitatea principală pentru masă este kilogramul (kg).

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g};$$

$$1 \text{ t} = 1000 \text{ kg};$$

$$1 \text{ q} = 100 \text{ kg}.$$

Unitatea principală pentru măsurarea timpului este secunda (s).

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s};$$

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min};$$

$$1 \text{ zi} = 24 \text{ h}.$$

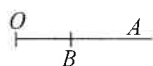
UNGHIUL

Unghi = reuniunea a două semidrepte având aceeași origine.

Unghiurile se măsoară în grade, minute și secunde: $1^\circ = 60'$; $1' = 60''$.

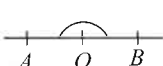
Clasificarea unghiurilor:

Unghi nul



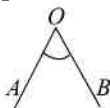
$$\angle AOB = 0^\circ$$

Unghi alungit



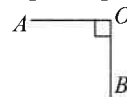
$$\angle AOB = 180^\circ$$

Unghi ascuțit



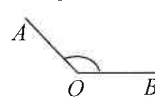
$$\angle AOB < 90^\circ$$

Unghi drept



$$\angle AOB = 90^\circ$$

Unghi obtuz



$$\angle AOB > 90^\circ$$

Unghiuri congruente = unghiuri care au aceeași măsură.

Bisectoarea unui unghi = semidreapta cu originea în vârful unghiului, situată în interiorul acestuia, care îl împarte în două unghiuri congruente.

Unghiuri adiacente: au același vârf, o latură comună și nu au puncte interioare comune.

Unghiuri complementare: două unghiuri care au suma măsurilor de 90° .

Unghiuri suplementare: două unghiuri care au suma măsurilor de 180° .

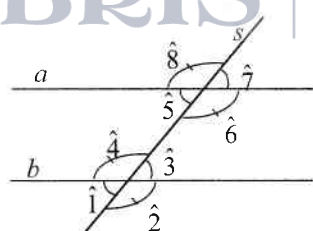
Unghiuri opuse la vârf: două unghiuri cu vârful comun și laturile în prelungire.

Două unghiuri opuse la vârf sunt congruente.

Drepte paralele: două drepte coplanare, fără puncte comune.

Drepte perpendiculare: două drepte concurente care formează un unghi drept.

Unghiuri congruente formate de două drepte paralele cu o secantă:



$\hat{3} \equiv \hat{5}$
 $\hat{4} \equiv \hat{6}$
 $\hat{1} \equiv \hat{7}$
 $\hat{2} \equiv \hat{8}$

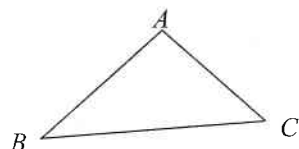
alterne interne

alterne externe

$\hat{1} \equiv \hat{5}$
 $\hat{4} \equiv \hat{8}$
 $\hat{2} \equiv \hat{6}$
 $\hat{3} \equiv \hat{7}$

corespondente

TRIUNGHIUL



Notatie: $\triangle ABC$

Elemente:

- vârfuri: A, B, C
 - laturi: AB, BC, AC
 - unghiuri: $\sphericalangle BAC, \sphericalangle ABC, \sphericalangle BCA$
- $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ$

Inegalitatea triunghiului:

$$|AB - AC| < BC < AB + AC$$

Clasificare:

I. După unghiuri

Ascutitunghic	Dreptunghic	Obtuzunghic

II. După laturi

Oarecare	Isoscel	Echilateral

Triunghiuri congruente: au laturile omoloage congruente și unghiurile omoloage congruente.

Cazuri de congruență:

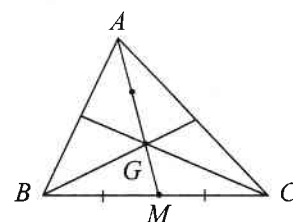
Triunghiuri oarecare	Triunghiuri dreptunghice
1. L.U.L.	1. C.C.
2. U.L.U.	2. C.U.
3. L.L.L.	3. I.U.
	4. I.C.

LINII IMPORTANTE ÎN TRIUNGHI

Mediana: segmentul care unește un vârf al triunghiului cu mijlocul laturii opuse.

Centrul de greutate (G) = punctul de intersecție a medianelor.

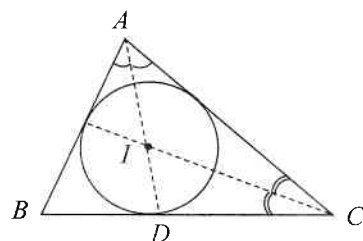
$$AG = \frac{2}{3} AM; GM = \frac{1}{3} AM.$$



Bisectoarea: semidreapta cu originea în vârful unghiului, interioară unghiului, ce formează cu laturile unghiului două unghiuri congruente.

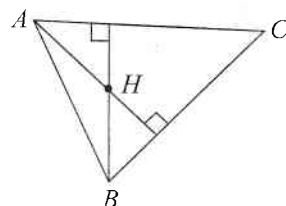
Centrul cercului înscris (I) = punctul de intersecție a bisectoarelor.

$$d(I, AB) = d(I, AC) = d(I, BC) = r.$$



Înălțimea: segmentul ce trece printr-un vârf al triunghiului și este perpendicular pe latura opusă.

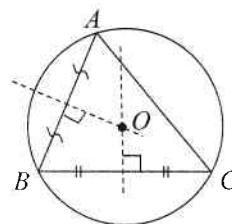
Ortocentrul triunghiului (H) = punctul de intersecție a înălțimilor.



Mediatoarea: dreapta perpendiculară pe o latură a triunghiului, ce trece prin mijlocul acesteia.

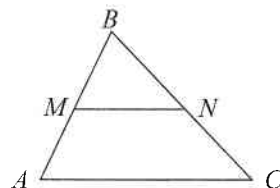
Centrul cercului circumscris (O) = punctul de intersecție a mediatoarelor.

$$OA = OB = OC = R.$$



Linia mijlocie în triunghi: segment care unește mijloacele a două laturi ale triunghiului.

Linia mijlocie este paralelă cu a treia latură și egală cu jumătate din lungimea acesteia.



TRIUNGHIURI SPECIALE

Triunghiul isoscel:

- are două laturi congruente (a treia se numește bază);
- unghiurile alăturate bazei sunt congruente;
- bisectoarea unghiului din vârf este mediană, înălțime și mediatoare corespunzătoare bazei.

Triunghiul echilateral:

- are toate laturile congruente;
- are toate unghiurile congruente (fiecare având măsura de 60°);
- bisectoarea oricărui unghi este mediană, înălțime și mediatoare corespunzătoare laturii opuse.

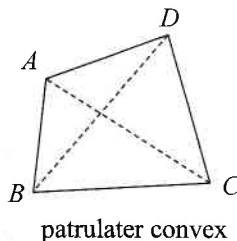
Triunghiul dreptunghic:

- are un unghi drept, iar celelalte două sunt ascuțite și complementare;
- mediana corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei;
- cateta opusă unui unghi de 30° este egală cu jumătate din ipotenuză (teorema 30° - 60° - 90°).

PATRULATERE

Elemente:

- vârfuri: A, B, C, D ;
 - laturi: AB, BC, CD, AD ;
 - unghiuri: $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$;
 - diagonale: AC, BD .
- $$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$



Paralelogramul = patrulaterul cu laturile opuse paralele.

- laturile opuse sunt congruente;
- unghiurile opuse sunt congruente;
- unghiurile alăturate sunt suplementare;
- diagonalele se înjumătățesc.

Dreptunghiul = paralelogramul cu un unghi drept.

- are toate proprietățile paralelogramului;
- are toate unghiurile drepte;
- diagonalele sunt congruente.

Rombul = paralelogramul cu două laturi consecutive congruente.

- are toate proprietățile paralelogramului;
- toate laturile sunt congruente;
- diagonalele sunt perpendiculare și sunt bisectoarele unghiurilor rombului.

Pătratul = rombul cu un unghi drept.

- are toate proprietățile rombului;
- are toate proprietățile dreptunghiului.

Trapezul = patrulaterul cu două laturi paralele și celelalte două laturi neparalele.

Dacă $CC' \perp AB$, atunci CC' = înălțimea trapezului.

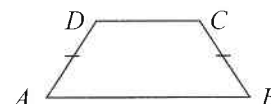
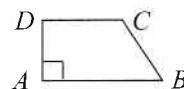
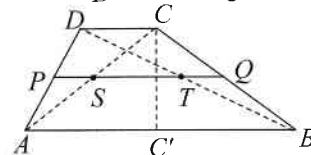
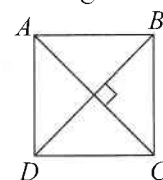
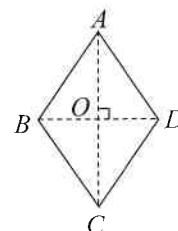
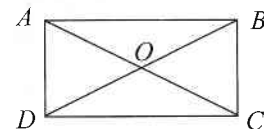
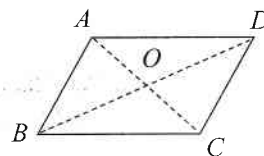
Linia mijlocie (PQ) = segmentul ce unește mijloacele laturilor neparalele.

$$PQ = \frac{(AB + CD)}{2} \text{ și } ST = \frac{|AB - CD|}{2}, \text{ unde } \{T\} = PQ \cap BD, \{S\} = PQ \cap AC.$$

Trapez dreptunghic = trapezul având un unghi drept.

Trapez isoscel = trapezul având laturile neparalele congruente.

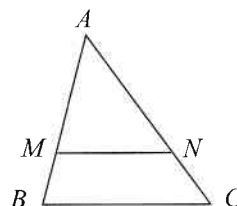
- unghiurile alăturate bazelor sunt congruente;
- unghiurile opuse sunt suplementare;
- diagonalele sunt congruente.



RELAȚII METRICE

Teorema lui Thales:

$$MN \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$



Triunghiuri asemenea:

$$\triangle ABC \sim \triangle MNP \text{ dacă } \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} \text{ și } \angle A \equiv \angle M, \angle B \equiv \angle N, \angle C \equiv \angle P.$$

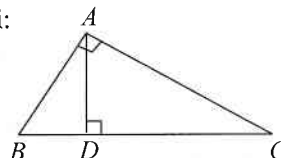
- Dacă $\triangle ABC$ este dreptunghic în A și $D = \text{pr}_{BC} A$, atunci:

Teorema catetelor:

$$AC^2 = BC \cdot CD; AB^2 = BC \cdot BD.$$

Teorema înălțimii:

$$AD^2 = BD \cdot DC.$$

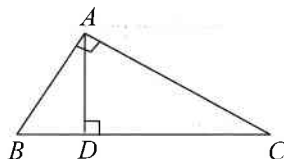


Teorema lui Pitagora:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Reciproca teoremei lui Pitagora:

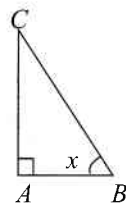
Dacă $BC^2 = AB^2 + AC^2$, atunci $m(\angle BAC) = 90^\circ$.



Elemente de trigonometrie

Dacă ABC este un triunghi dreptunghic în A și $x \in (0^\circ, 90^\circ)$ este măsura unui unghi ascuțit, atunci:

$$\sin x = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}}; \cos x = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}}; \operatorname{tg} x = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}}; \operatorname{ctg} x = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}}.$$

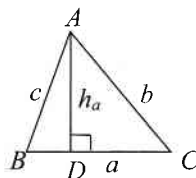


Unghiul Funcția trigonometrică	30°	45°	60°
$\sin t$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos t$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} t$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} t$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

ARII

Triunghi oarecare:

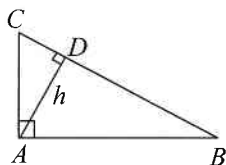
$$\mathcal{A} = \frac{BC \cdot AD}{2} \left(= \frac{a \cdot h_a}{2} \right) = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(\angle BAC)}{2}$$



Triunghi dreptunghic:

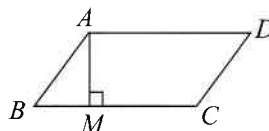
$$\mathcal{A} = \frac{AB \cdot AC}{2} \left(= \frac{c_1 \cdot c_2}{2} \right) = \frac{h \cdot ip}{2};$$

$$h = \frac{c_1 \cdot c_2}{ip}$$



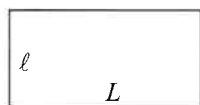
Paralelogram:

$$\mathcal{A} = BC \cdot AM = AB \cdot BC \cdot \sin(\angle ABC)$$



Dreptunghi:

$$\mathcal{A} = L \cdot \ell$$



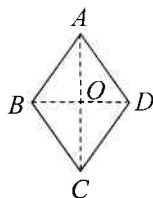
Pătrat:

$$\mathcal{A} = a^2$$



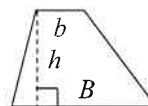
Romb:

$$\mathcal{A} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \ell^2 \sin(\angle A)$$



Trapez:

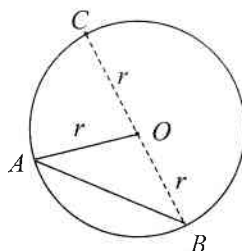
$$\mathcal{A} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$



Raportul ariilor a două figuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

Cerc = mulțimea punctelor din plan situate la distanța r ($r > 0$) față de un punct fix O ; notăm $\mathcal{C}(O, r)$.

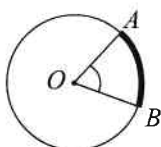
- centrul cercului: punctul O ;
- raza cercului: segmentul OA sau numărul care reprezintă lungimea acestuia;
- coardă: segmentul AB ;
- diametrul: segmentul BC sau numărul care reprezintă lungimea acestuia;
- arc de cerc: $\widehat{AB}$.



Unghiuri relative la cerc:

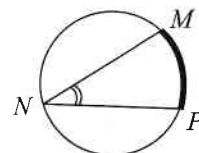
- unghi la centru: $\angle AOB$

$$m(\widehat{AB}) = \angle AOB$$



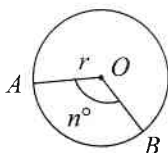
- unghi înscris în cerc: $\angle MNP$

$$\angle MNP = \frac{m(\widehat{MP})}{2}$$



$$L_{\text{cerc}} = 2\pi r; \quad \mathcal{A}_{\text{disc}} = \pi r^2;$$

$$L_{\widehat{AB}} = \frac{\pi r n}{180}; \quad \mathcal{A}_{\text{sector}(AOB)} = \frac{\pi r^2 n}{360}.$$



POLIGOANE REGULATE

Poligon regulat = poligonul având toate laturile congruente și toate unghiurile congruente.

Orice poligon regulat poate fi înscris într-un cerc și poate fi circumscris unui cerc, cele două cercuri fiind concentrice.

Apotema poligonului regulat = distanța de la centrul cercului circumscris la o latură.

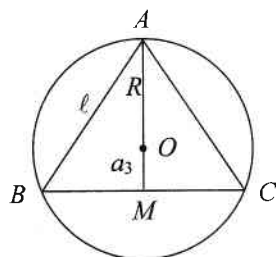
Triunghiul echilateral:

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2};$$

$$R = AO = \frac{2}{3}h;$$

$$a_3 = OM = \frac{1}{3}h;$$

$$\mathcal{A} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}.$$



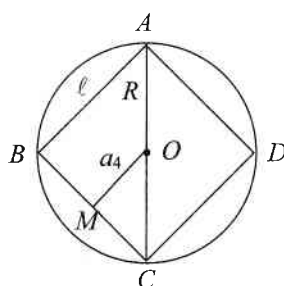
Pătratul:

$$AC = d = 2R = \ell\sqrt{2};$$

$$R = AO = \frac{\ell\sqrt{2}}{2};$$

$$a_4 = OM = \frac{\ell}{2};$$

$$\mathcal{A} = \ell^2.$$



Hexagonul regulat:

$$AD = 2R;$$

$$AC = R\sqrt{3};$$

$$\triangle AOB \text{ echilateral, deci } R = AO = \ell;$$

$$a_6 = OM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2};$$

$$\mathcal{A} = 6 \cdot \mathcal{A}_{AOB} = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}.$$

